# Ιανουάριος 2022, Απειροστικός Λογισμός 1, Τμήμα Α

## Διάρκεια 2 Ώρες

### Θέμα 1

(i) (0,25 Μονάδες) Διατυπώστε τον ορισμό της σύγκλισης μιας ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε κάποιο πραγματικό αριθμό $s$ $(x_n \to s)$.

(ii) (1,75 Μονάδες) Να αποδείξετε αποκλειστικά και μόνο με χρήση του παραπάνω ορισμού ότι η ακολουθία $x_n = 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό και εντοπίζοντας παράλληλα το όριο της.

### Θέμα 2

(i) (1,25 Μονάδες) Ας είναι $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $a_n \to a$.

(ii) (1,75 Μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η $f$ δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = \sqrt{2}$.

**Θέμα 3** (2 Μονάδες)
Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, για κάθε $x \geq 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Αποδείξτε ότι η $f$ λαμβάνει μέγιστη τιμή στο $[1, +\infty)$.

**Θέμα 4** (1,5 Μονάδες)
Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι σταθερή.

**Θέμα 5** (1,5 Μονάδες) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $|f'(x)| \leq \frac{1}{x^2}$, για κάθε $x > 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} [f(2x) - f(x)] = 0.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!